

Районная олимпиада
(тренировочные упражнения)

1. Докажите неравенство: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.
2. В разгар летнего сезона по сравнению с началом сезона ягоды дешевле на 15 %, а сахар дорожает на 10 %, в результате приготовление варенья из ягод по определенному рецепту обходится на 10 % дешевле. Сколько процентов от стоимости варенья (приготовленного по тому же рецепту) составляет стоимость ягод в начале сезона?
3. Вычислите значение выражения $\sqrt{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012 + 1}$, не применяя калькулятора.
4. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 м вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 1 : 3 (рис. 18). Найдите стороны вписанного прямоугольника.

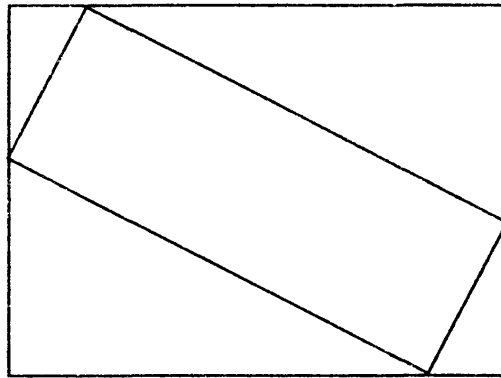


Рис. 18

5. В краже классного журнала из учительской подозреваются четверо учащихся: Александр, Борис, Виктор и Григорий. При выяснении того, кто повинен в воровстве журнала, они сказали директору школы:
Александр: «Это сделал Борис».
Борис: «Это сделал Григорий».
Виктор: «Это сделал не я».
Григорий: «Борис лжет, что это сделал я».
Правду сказал только один. Кто совершил кражу?
6. Найдите все значения a , при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$ имеет целые корни.

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = z, \\ yz = x, \\ xz = y. \end{cases}$$

8. Угол между диагоналями трапеции равен 120° . Одна из ее диагоналей равна 4, а высота — 2. Найдите длину второй диагонали.
9. Дан параллелограмм $ABCD$. K — середина стороны BC , M — середина стороны CD , $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60^\circ$. Найдите длину стороны AD . Ответ обоснуйте.
10. Из трех различных цифр x, y, z ($x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$) образованы все возможные трехзначные числа. Сумма этих чисел в три раза больше трехзначного числа, каждая цифра которого есть x . Найти цифры x, y, z .